

EXTRAIT DU
BULLETIN DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE
PURES ET APPLIQUÉES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

1^{ère} ANNÉE, No. 3

ELIE CARAFOLI

Maitre de conférences à l'École Polytechnique
de Bucarest

Calcul des performances d'un avion

*Donnului General C. Coandă
în semn de deosebită considerație și
măgii*

Eliaf.

50

BUCUREȘTI
MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
1930

AÉRONAUTIQUE. — *Calcul des performances d'un avion.*

par M. ELIE CARAFOLI

La détermination des performances d'un avion est un problème qui se pose toutes les fois qu'on construit un nouvel appareil de vol. Il est intéressant en effet de connaître les qualités d'un avion avant qu'il soit en état parfait de vol, car le plus souvent, c'est sur les performances probables prédéterminées qu'on juge l'intérêt de l'avion à construire et les possibilités de son emploi par rapport à d'autres de même genre.

Parmi les méthodes qu'on emploie ordinairement à cet effet, il y en a une généralement adoptée dans tous les bureaux techniques des maisons constructrices : c'est *la méthode logarithmique de Rith* utilisée dans les travaux d'Eiffel. Cette méthode d'un emploi courant est cependant très laborieuse est très difficile à manier, nécessitant le plus souvent une routine gagnée par une longue utilisation. Aussi, nous nous sommes proposé d'en exposer une autre, qui est à notre avis plus facile à manier, qui permet une plus grande rigueur et qui découle d'une manière très simple des équations d'équilibre.

Pour cela, nous allons d'abord établir les conditions de fonctionnement du groupe moto-propulseur pour passer ensuite à la solution des équations d'équilibre du vol.

1. Conditions de fonctionnement et caractéristiques du groupe moto-propulseur.

Le groupe moto-propulseur se compose d'un nombre quelconque de moteurs de puissances égales ou non et d'un nombre égal d'hélices tractives ou propulsives. Mais les propriétés d'un seul groupe moteur-hélice sont les mêmes, sauf interaction réciproque (hélices en tandem, etc.), que celles du même groupe faisant partie d'un ensemble de plusieurs groupes.

Aussi, nous allons étudier les conditions d'équilibre d'un seul groupe, quitte à faire, s'il est nécessaire, des remarques concernant un ensemble de groupes.

Soit :

P_u = puissance utile consommée par l'hélice

P_m = puissance fournie par le moteur

N_0 = nombre nominal de chevaux-vapeurs du moteur

n_0 = nombre de tours nominal du moteur

n = nombre de tours à l'altitude z de vol

ρ = densité de l'air à l'altitude z

ρ_0 = densité de l'air au sol

p = pression de l'air à l'altitude z

p_0 = pression de l'air au sol

V_z = vitesse de l'avion à l'altitude z

$\omega_z = \frac{2\pi n_z}{60}$ = vitesse angulaire de l'hélice

R = rayon de l'hélice.

La puissance consommée par l'hélice est proportionnelle à la densité de l'air et à un coefficient μ variable avec le rapport entre la vitesse axiale de l'hélice et celle périphérique. Ainsi, on peut écrire :

$$P_u = \mu \rho \pi R^2 (R \omega_z)^3 = \mu \rho \pi R^5 \left(\frac{\pi}{30}\right)^3 n_z^3.$$

La puissance du moteur par contre est une fonction plus compliquée de la densité. Selon quelques auteurs, cette puissance varierait proportionnellement à la pression :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} (1 - \alpha z) = \frac{\rho}{\rho_0} (1 - 0,0000226 z) = \frac{\rho}{\rho_0} \gamma;$$

et suivant les instructions du Service Technique et Industriel de l'Aéronautique Français, d'après une loi un peu différente :

$$1,11 \frac{\rho}{\rho_0} - 0,11 = \frac{\rho}{\rho_0} (1,11 - 0,11 \frac{\rho_0}{\rho}) = \frac{\rho}{\rho_0} \gamma.$$

D'une manière générale, quelle qu'elle soit cette loi de variation, nous allons la mettre toujours sous la forme $\frac{\rho}{\rho_0} \gamma$, où $\gamma = 1$ à l'altitude zéro (au sol).

En outre, la puissance du moteur est sensiblement proportionnelle au nombre de tours, de manière qu'on pourrait écrire finalement.

$$P_m = 75 N_0 \frac{n_z}{n_0} \frac{\rho}{\rho_0} \gamma.$$

Pour l'équilibre énergétique du groupe moto-propulseur, P_u et P_m sont égales et de cette égalité on tire :

$$n_z^3 = \frac{30^3 \times 75}{N_0 \pi^4} \cdot \frac{N_0}{\rho_0 R^5} \cdot \frac{\gamma}{\mu} = A \cdot \frac{\gamma}{\mu} = n^3 \gamma$$

en mettant

$$(1) \quad n = \sqrt{\frac{A}{\mu}}.$$

L'expression $\sqrt{\frac{A}{\mu}}$, que nous avons désignée par n , pourrait être appelée «nombre de tours réduit au sol», et le nombre réel de tours à l'altitude z sera dans ce cas égal à

$$(2) \quad n_z = n \sqrt{\gamma}.$$

Pour déterminer n , il faut connaître μ et par conséquent les caractéris-

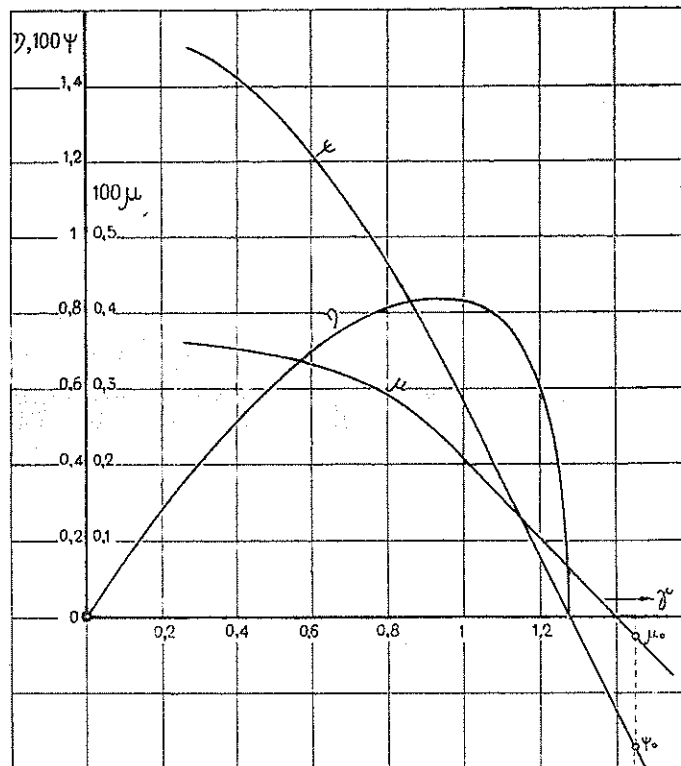


Fig. 1 — Caractéristiques de l'hélice

tiques de l'hélice (fig. 1). Celles-ci varient en fonction d'un coefficient sans dimensions

$$(3) \quad \gamma = \pi \frac{V_z}{R \omega_z} = \frac{30 V_z}{R n_z} = \frac{30}{R} \cdot \frac{V}{n}$$

en mettant, par analogie avec n_z ,

$$(2') \quad V_z = V \sqrt{\gamma},$$

où V serait la vitesse «réduite au sol».

Des relations (1) et (3) on pourrait tirer V et n en fonction de γ , ou n en fonction de V (et vice-versa), en éliminant γ . Comme μ n'est pas une fonction simple de γ , n ne le sera pas non plus, de sorte qu'il va falloir tracer les courbes de V et de n graphiquement. La relation entre V et n sera utilisée sous une autre forme plus loin, mais il est nécessaire de faire un tableau des quantités μ , n , V et η pour chaque valeur de γ .

2. Equations du vol

Soit :

- G = poids de l'avion
- S = surface de l'avion
- C_x = coefficient unitaire de résistance
- C_z = coefficient unitaire de portance
- $M_{(G)}$ = le moment des forces par rapport au centre de gravité
- η = rendement de l'hélice
- φ = angle de la trajectoire de l'avion avec l'horizontale

Par rapport à un système d'axes parallèle et normal à la trajectoire, les 3 équations d'équilibre du vol peuvent être mises sous la forme ¹⁾ :

$$(4) \quad \begin{cases} 75 N_0 \frac{n_z}{n_0} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \gamma \eta - G V_z \sin \varphi = \rho/2 S C_x V_z^3 \\ G \cos \varphi = \rho/2 S C_z V_z^2 \\ M_{(G)} = 0 \end{cases}$$

En remplaçant V_z et n_z respectivement par $V \sqrt{\gamma}$ et $n \sqrt{\gamma}$, les deux premières équations de (4) se réduisent aux formes suivantes :

$$(4') \quad \begin{cases} C_x = \frac{16 \times 75 N_0 n \eta}{n_0 S V^3} - 2 \frac{G}{S \rho \gamma} \frac{\sin \varphi}{V^2} \\ \frac{C_z}{\cos \varphi} = 2 \frac{G}{S \gamma \rho} \cdot \frac{1}{V^2} \end{cases}$$

La solution de ces équations nous donnerait les performances de l'avion

¹⁾ La variation de l'angle φ étant très lente, la trajectoire pourrait être considérée comme linéaire, de sorte qu'on peut négliger l'accélération normale. De même pour l'accélération tangentielle. Nous allons le montrer d'ailleurs sur un exemple concret, en prenant la montée d'un avion de chasse rapide. On trouve que le terme $-\frac{G}{g} V_z \frac{dV_z}{dt}$, qui entrerait dans le premier membre de la première équation (4), deviendrait,

$$\frac{G}{g} V_z \frac{dV_z}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = G V_z \sin \varphi \frac{k}{g} V_z$$

où k est la pente, pratiquement linéaire, de la variation de la vitesse par rapport à l'altitude, égale, pour l'exemple que nous avons choisi, à 0,0026. Il en résulte, en prenant la plus grande vitesse V_z , sur la trajectoire,

$$\frac{G}{g} V_z \frac{dV_z}{dt} < G V_z \sin \varphi \times 0,015,$$

et par conséquent l'erreur qu'on commet et de maximum 1,5% en plus sur la vitesse de montée.

3. Détermination des performances.

On ne peut pas donner une solution générale simple des équations (4'), parceque les caractéristiques de l'hélice, de même que les coefficients unitaires C_x et C_z , ne sont pas reliés entre eux par des expressions analytiques connues. Aussi, nous allons résoudre graphiquement ce système d'équations en choisissant pour cela $\frac{1}{V_s}$ comme variable indépendante. Il s'agit tout d'abord de tracer la courbe de C_z en fonction de cette nouvelle variable, mais il est nécessaire de connaître au préalable la relation entre C_z et C_x , c'est à dire la *polaire*. Celle-ci doit être corrigée comme il suit :

Correction de la polaire. Soit $C_z = f(C_x)$ la *polaire* de l'avion complet (fig. 2). Il faut remarquer que sur les courbes des laboratoires aérodynamiques il n'est pas prévu l'influence du souffle de l'hélice. D'autre part, la polaire de l'avion est faite pour un *braquage déterminé de la partie mobile des empennages horizontaux*, — généralement braquage nul —, ce qui n'est pas conforme à la réalité, car à chaque angle de vol le braquage est différent et par conséquent les C_x et C_z de l'avion aussi.

La correction à apporter étant généralement très petite, on néglige l'influence du braquage ainsi que l'augmentation de la portance et résistance des empennages due au souffle de l'hélice.

Quant à l'aile, cette augmentation porte seulement sur la partie de l'aile qui entre dans le sillage de l'hélice. La majoration de vitesse due au souffle de l'hélice est caractérisée par le rapport

$$\left(\frac{V_s}{V}\right)^2 = 1 + \frac{S}{\pi R^2} (C_x + C_z \operatorname{tg} \varphi)$$

Si la surface de l'aile balayée par le souffle est S_s , il est facile de voir que les coefficients $C_{x(aile)}$ et C_z sont à multiplier par le facteur de majoration

$$k = 1 + \frac{S_s}{\pi R^2} (C_x + C_z \operatorname{tg} \varphi)$$

On va considérer d'abord le vol horizontal ($\varphi = 0$) et on va apporter la correction respective sur la polaire de l'aile. Nous allons voir ensuite, lors de l'étude de la montée, comment on peut tenir compte du terme $C_z \operatorname{tg} \varphi$.

Pour la résistance du fuselage il y a à considérer deux cas : premièrement quand les caractéristiques de l'hélice sont données en tenant compte de l'interaction hélice-fuselage, et deuxièmement, quand ces caractéristiques sont celles de l'hélice seule.

Dans le dernier cas il n'y a pas de correction à faire. L'expérience montre en effet que l'interaction hélice-fuselage se traduit par une compensation réciproque de résistance et traction.

Dans le premier cas la résistance Cx_f du fuselage doit être multipliée par le facteur

$$k' = 1 + \frac{S}{\pi R^2} (Cx + Cz \operatorname{tg} \varphi).$$

On considère, comme pour l'aile, le vol horizontal ($\varphi = 0$) et on multiplie par k' le coefficient Cx_f de la résistance du fuselage — Cx_f est la différence entre le Cx total de l'avion et $Cx_{(aile)}$; on trace par exemple sur le même papier les deux polaires, de l'aile seule et de l'avion complet, et on considère la résistance comprise entre les deux (fig. 2).

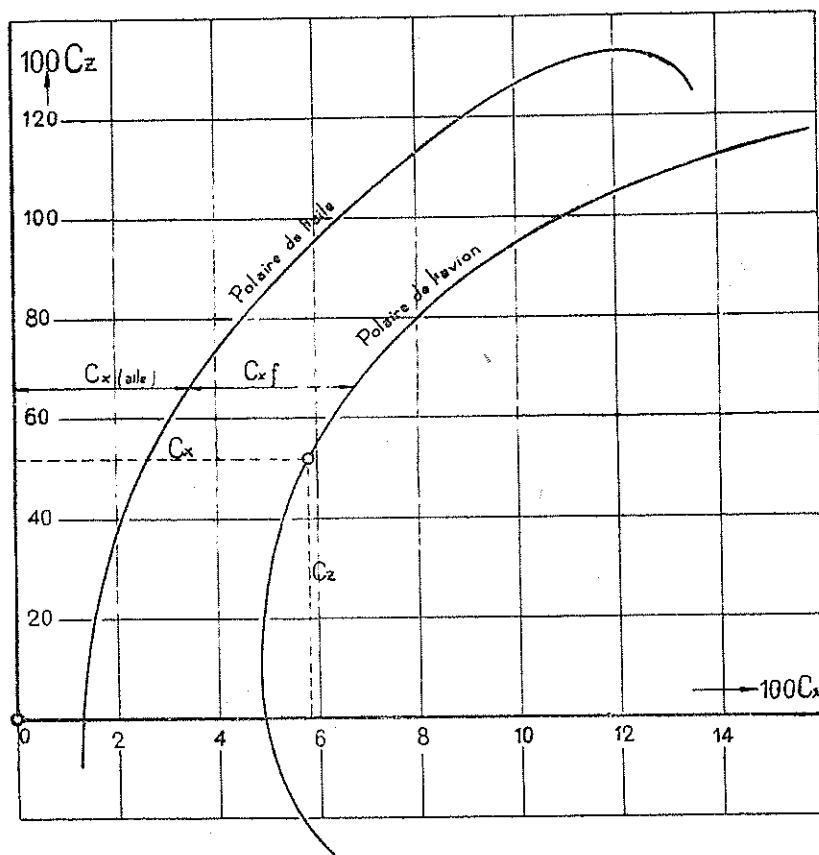


Fig. 2. — Polaire de l'aile et de l'avion

En ajoutant après à la *polaire corrigée de l'aile seule* les résistances Cx_f ainsi obtenues, on obtient finalement la *polaire corrigée de l'avion complet*.

Pratiquement la nouvelle polaire ainsi corrigée ne diffère pas trop de celle obtenue au laboratoire, de sorte qu'on ne fait pas une grande erreur si

on néglige cette correction, très laborieuse par ailleurs; d'autant plus, que la similitude aérodynamique sur la modèle réduit et sur l'avion en vraie grandeur n'étant pas réalisée, les deux polaires respectives ne seront pas identiques et il est aléatoire dans ce cas de chercher une rigueur absolue.

Revenons à la polaire de l'avion, corrigée ou non, — selon qu'on désire une approximation plus ou moins grande, — et proposons nous de tracer une courbe

$$C_z = f\left(\frac{1}{V^2}\right)$$

qui représenterait la première des équations (4') et que nous appellerons *courbe de puissance*. Pour cela considérons deux cas: *le vol horizontal* et *le vol en montée*.

Calcul des vitesses dans le vol horizontal.

L'angle φ est nul et le deuxième terme du deuxième membre de la première équation (4') est nul également. Pour chaque C_z correspond, d'après la polaire (fig. 2), un C_x déterminé et d'après l'équation susdite, un V ou $\frac{1}{V^2}$ également déterminé. En effet, C_x étant connu, on aura

$$(5) \quad \frac{n\eta}{V^3} = \frac{n^0}{16 \times 75 N_0} S C_x;$$

comme par ailleurs on connaît n , η en fonction de V , on peut tracer la courbe $\frac{n\eta}{V^3}$ en fonction de $\frac{1}{V^2}$ et déterminer ainsi $\frac{1}{V^2}$ pour chaque valeur de C_x , donc de C_z .

Ainsi donc, il faut tracer d'abord la courbe

$$(5') \quad \frac{n\eta}{V^3} = f\left(\frac{1}{V^2}\right)$$

qu'il est facile à déterminer d'après les conditions de fonctionnement du groupe moto-propulseur. On prend en abscisses, à une *échelle quelconque*, les valeurs de $\frac{1}{V^2}$ et on ordonnées le premier membre de (5'). A chaque C_z on aura un C_x déterminé, qui, introduit dans (5), nous donne une valeur déterminée de $\frac{n\eta}{V^3}$. A cette dernière valeur correspond sur la courbe (5') *une abscisse* au droit de la quelle on met le valeur de C_z considérée au début.

Ainsi par conséquent, en partant d'un point sur la polaire (fig. 2) et

en introduisant la valeur de Cx dans (5), on obtient un point (fig. 3) sur la courbe (5'), dont l'abscisse est égale à celle de Cz de la courbe de puissance que nous nous sommes proposé de tracer :

$$(6) \quad Cz = f\left(\frac{1}{V^3}\right).$$

La deuxième équation de (4') représente des lignes droites issues de l'origine que nous appellerons *droites de sustentation*. Le coefficient angulaire de ces lignes droites varie avec l'altitude et pour une altitude donnée on aura en général deux points d'intersection avec la *courbe de puissance*, représentant la première équation (4'). Ces deux points seront les points d'équilibre et correspondront à deux vitesses V différentes. Si les abscisses $\frac{1}{V^3}$ sont marquées en V , il est facile de lire immédiatement au droit de chaque point d'intersection la valeur de V . Mais il est plus facile, — étant donnée que l'axe des abscisses n'a servi qu'une seule fois, à la détermination de la courbe (5') —, de tracer une fois pour toutes la courbe W de la vitesse en Km en fonction de $\frac{1}{V^3}$ et de lire sur cette courbe la valeur de la vitesse en Km.

Ainsi donc, pour chaque altitude z on aura deux vitesses W et W' , de même que les nombres de tours n et n' .

On détermine une fois pour toutes en fonction de l'altitude la valeur de $\sqrt[3]{\gamma}$ et on calcule ainsi les vitesses réelles W_z et W'_z en Km, de même que les nombres de tours réels n_z et n'_z , en dressant au besoin un tableau comme celui ci-après :

Z	$\sqrt[3]{\gamma}$	W	W_z	n	n_z
0	1	323	323	2188	2188
4000	0,953	321,5	312	2183	2082

Détermination du plafond théorique. Les droites de sustentation représentant la deuxième équation du système (4') ont un coefficient angulaire qui croît avec l'altitude. A partir d'une altitude limite ces droites ne rencontrent plus la courbe (6) de puissance et le vol n'est plus possible au de là de cette *altitude limite*. Celle-ci s'appelle alors le *plafond théorique* de l'avion et la droite de sustentation correspondante est tangente à la courbe de puissance.

L'expression analytique du plafond est représentée par la formule

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3 \gamma^3 = \frac{16}{75^2} \left(\frac{G}{N_0}\right)^2 \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \frac{1}{\eta^3} \frac{C_x^2}{C_z^3} \frac{G}{S}.$$

Vitesse minima. Nous avons dit plus haut que pour chaque altitude correspond deux points d'intersection, donc respectivement deux vitesses : une *vitesse maxima* et une autre *minima*. La vitesse minima correspondant

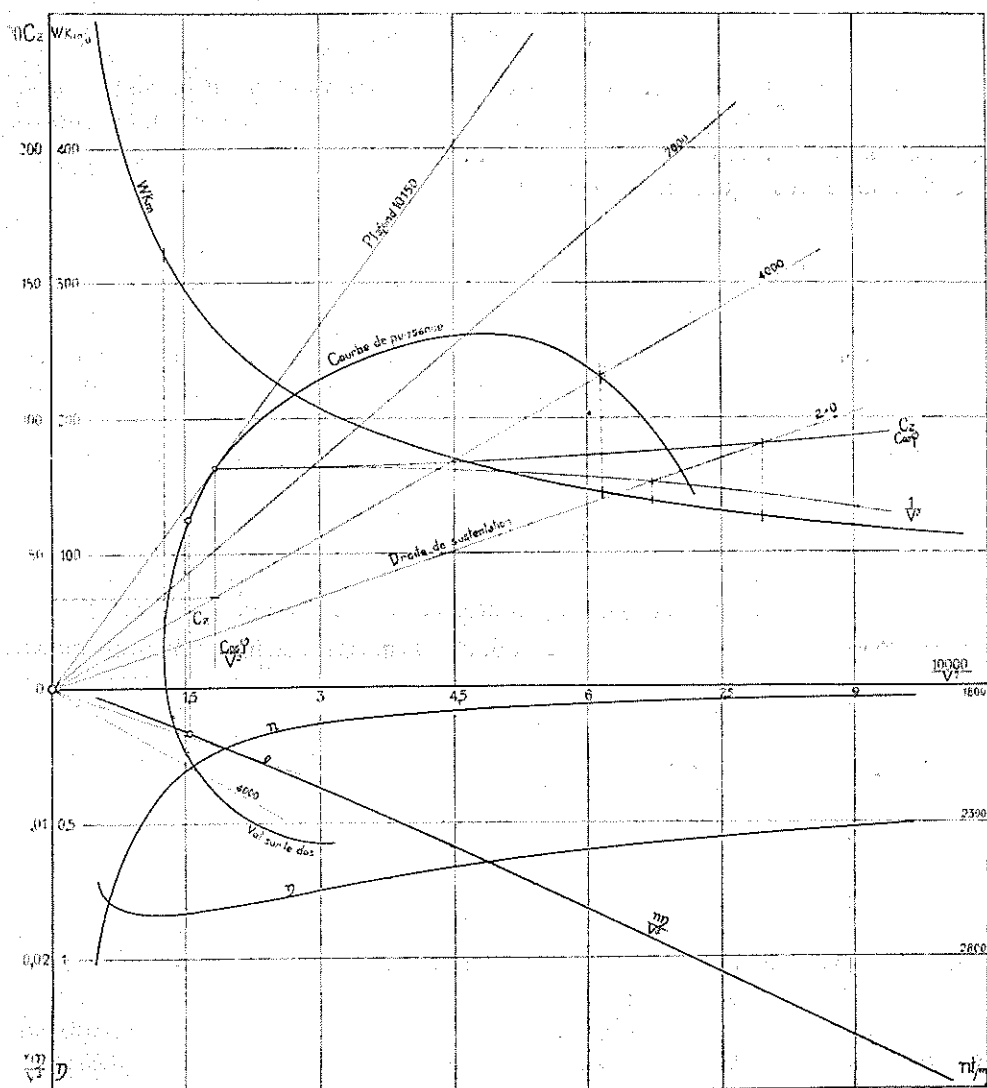


Fig. 3. Epure pour la détermination des performances d'un avion.

à l'altitude $z = 0$ (au sol) sera appelée *vitesse minima de sustentation*, car elle est la plus petite vitesse avec laquelle l'avion pourrait voler horizontalement.

Vol sur le dos. Pour le vol sur le dos les C_z sont négatifs par rapport à l'axe de portance nulle du profil, de sorte que les *droites de sustentation*

lation, ainsi que la *courbe de puissance* se trouvent de l'autre côté des axes des abscisses. Leurs intersections nous déterminent les *vitesse réduite au sol* dans le vol sur le dos.

Etude de la montée.

Le temps de montée à l'altitude z dépend des valeurs de la vitesse ascendante $v_z = V_z \sin \varphi$ le long de cette altitude. Comme précédemment, nous appellerons $v = V \sin \varphi$ *vitesse ascendante „réduite au sol“*, dont l'expression tirée des équations (4') sera :

$$(8) \quad v = 75 \times 8 \frac{N_0}{G} \cdot \frac{n}{n_0} \eta \rho v - \sqrt{\frac{C_x^2}{C_z^3} \cos^3 \varphi} \cdot \frac{2}{\rho v} \frac{G}{S}.$$

On voit, d'après cette expression, que la vitesse ascendante dépend de l'altitude et de l'angle d'incidence de l'avion. Pour une même altitude il y a une position optima pour laquelle v est maxima. En remarquant que $n \eta$, $\frac{C_x^2}{C_z^3}$ et $\cos \varphi$ sont des fonctions de $\left(\frac{1}{V^2}\right)$, on peut dériver v par rapport à $\left(\frac{1}{V^2}\right)$ et trouver ainsi la maximum de v . La recherche de ce maximum est très laborieuse et dépourvue de tout intérêt pratique. On constate, en effet, que le minimum du temps de montée est fait approximativement pour un angle d'incidence, pour lequel $\frac{C_x^2}{C_z^3}$ est également minimum. On peut le voir d'ailleurs d'après l'expression (8) de v , en mettant $\cos \varphi = \infty 1$ et en considérant le nombre de tours et le rendement de l'hélice constants.

Pratiquement, on considère la montée optima pour l'incidence de l'avion qui correspond au plafond.

Soit qu'on ait déterminé pour chaque altitude les incidences optima soit qu'on considère à l'avance l'incidence optima celle du plafond ou une autre, soit enfin qu'on impose d'autres conditions pour la montée, le problème se pose de la manière suivante :

Etant donnée une relation entre l'angle d'incidence, la vitesse et l'altitude, calculer le temps de montée de l'avion à différentes altitudes.

Le système (4') renferme 4 inconnues : incidence (C_x et C_z), ρv , V et φ , de sorte que si on se donne deux (par exemple : altitude et vitesse, ou altitude et angle d'incidence, ou vitesse et angle d'incidence), les deux autres sont déterminées.

¹⁾ On voit d'après les équations (4') que pour une valeur donnée de V (ou de $\frac{1}{V^2}$), φ , C_z et C_x sont déterminés, la relation entre C_x et C_z étant donnée par la polaire.

Si on a déterminé pour chaque altitude la condition du maximum de la vitesse ascendante, nous avons une relation de plus qui nous permet de trouver les trois inconnues qui restent.

En général, on se donnera une relation supplémentaire entre deux inconnues et, selon le cas, on déterminera la vitesse de montée à chaque altitude. Pour cela, nous allons mettre l'une des équations (4') sous d'autres formes :

$$(9) \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1200}{n_0} \cdot \frac{N_0}{S} \frac{n \eta}{V^3} - Cx}{Cz}$$

$$(10) \frac{Cz}{\cos \varphi} = \sqrt{Cz^2 + \left(\frac{1200}{n_0} \frac{N_0}{S} \frac{n \eta}{V^3} - Cx \right)^2}$$

Soit par exemple une relation entre l'angle d'incidence (Cx , Cz) et V : pour une valeur de V , Cx et Cz sont déterminés et $\operatorname{tg} \varphi$ également ; on en déduit $v = V \sin \varphi$, et de la deuxième équation (4') on tire ρv et par conséquent l'altitude.

Si nous avons une relation entre l'altitude et l'angle d'incidence, il faut trouver φ et V , d'où il en résultera v . Cz et Cx étant connus pour une altitude donnée, on trace la courbe (10) en fonction de $\frac{1}{V^2}$ et le point d'intersection avec la *droite de sustentation* correspondant à la même altitude nous donnera V et $\cos \varphi$, d'où $\sin \varphi$ et par conséquent $v = V \sin \varphi$ pour l'altitude en question.

On peut avoir finalement une relation entre l'altitude et V . Pour trouver φ , on trace pour une même altitude la courbe de $\cos \varphi$ en fonction de Cz , d'après la relation (10). Pour utiliser l'échelle des abscisses, il faut diviser $\cos \varphi$ par V^2 et tracer ainsi $\cos \varphi / V^2$ par rapport à Cz . Le point d'intersection avec la droite respective de sustentation nous donnera Cz et comme V est connue, on déterminera $\sin \varphi$ et v .

Le problème tel que nous l'avons traité est général. Pratiquement il se pose d'une manière spéciale : a) *monter à un angle d'incidence constant*, celui du plafond par exemple ; b) *monter à « badin » constant*, celui du plafond également ; c) *monter à un rendement constant de l'hélice*, celui encore du plafond.

a) *La montée à un angle d'incidence constant*. Le point sur la courbe de puissance qui correspond au Cz de montée caractérise l'altitude qu'on pourrait atteindre avec cette incidence. La droite de sustentation qui passe par ce point détermine cette altitude, pour laquelle $\varphi = 0$ (sur la figure 3 nous avons pris le Cz correspondant au plafond).

Le deuxième membre de l'expression (10) ne contient comme inconnues que $\frac{n \eta}{V^3}$, qui est une fonction déterminée de $1/V^2$. On peut tracer

ainsi la courbe $Cz/\cos \varphi$ (10) en fonction de $1/V^2$. Cette courbe part du point correspondant au plafond et coupe les droites de sustentation en différents points qui caractérisent le vol aux altitudes correspondantes. Pour ces mêmes points on déduit, d'après (9) et (10), $\sin \varphi$ et V sur l'axe des abscisses ou W sur la courbe des vitesses en Km. On en calculera $v = V \sin \varphi$ et $v_z = \sqrt{v} v$. Pratiquement on dressera un tableau comme celui ci-après :

z	$\sqrt{v}$	W	v	n	W_z	v_z	n_z	$\frac{1}{v_z}$	t
0	1	128,5	14,45	1847	128,5	14,45	1847	0,0691	—
4.000	0,953	171,5	8,65	1837	163,5	8,24	1798	0,1212	6,3

b) *La montée à «Badin» constant.* L'antenne de prise de la pression dynamique de la vitesse transmet à l'appareil receptrer un effet de pression proportionnel à

$$\rho V_z^2 = \rho v V^2$$

et l'indication de l'appareil est également proportionnelle à cet effet.

Si cette indication reste constante («badin» constant), on voit d'après la deuxième équation du système (4'), que $\cos \varphi$ est proportionnel à Cz :

$$\frac{Cz}{\cos \varphi} = 2 \frac{G}{S} \cdot \frac{1}{\rho v} \cdot \frac{1}{V^2} = 2 \frac{G}{S} \cdot \frac{1}{\rho V_z^2} = 2 \frac{G}{S} \frac{1}{K}$$

La constante K sera déterminée d'après l'altitude maxima qu'on veut atteindre. Pour l'altitude du plafond on a ρ , v et V , on en déduit

$$K = \rho v V^2$$

De l'expression (10) on tire :

$$(10') \quad \frac{n \eta}{V^3} = \left(Cx + \sqrt{4 \left(\frac{G}{S} \right)^2 \frac{1}{K^2} - C_z^2} \right) \frac{n_0}{1200} \frac{S}{N_0}$$

qu'on peut tracer en fonction de Cz . Il est plus facile dans ce cas de marquer la valeur de Cz au droit de l'abscisse qui correspond à la valeur de $\frac{n \eta}{V^3}$ déduite de (10') et obtenir ainsi une courbe Cz en fonction de $\frac{1}{V^2}$ (fig. 3).

A chaque altitude on aura :

$$\frac{1}{V^2} = \frac{\rho v}{K} \left(\text{ou } V = \sqrt{\frac{K}{\rho v}} \right)$$

et sur la courbe tracée d'après (10'), on détermine Cz (et Cx).

En calculant ensuite $\sin \varphi$ d'après (9), on aura finalement la vitesse ascendante.

c) *La montée à rendement constant de l'hélice.* Pratiquement cette montée est exécutée en faisant varier le nombre de tour proportionnellement à $\sqrt{V}$, c'est à dire en gardant constant le nombre de tours réduit au sol. En effet, le rendement de l'hélice étant constant, V et n le sont aussi. De l'expression (10) on tire $\cos \varphi$ qu'on trace en fonction de Cz , après l'avoir divisé par V^2 pour marquer les résultats sur l'échelle de $\frac{1}{V^2}$. Cette courbe se confond partiquement avec la droite verticale (abscisse constante) passant par le point de η , n ou V choisis. Les intersections de cette verticale avec les droites de sustentation nous donnent les Cz qui correspondent aux altitudes respectives. De (9) on tire $\sin \varphi$ et on calcule ainsi v pour ces mêmes altitudes (fig. 3).

Remarque. Nous n'avons rien parlé de la correction de la polaire. Les coefficients de correction k et k' , définis plus haut, contiennent Cx et $Cz \operatorname{tg} \varphi$. On peut tenir compte du premier, mais pour le second il faut avoir φ à chaque altitude.

Dans ce cas on détermine, en première approximation d'après la polaire non corrigée, les angles φ et on refait le calcul après avoir introduit la correction totale. Supposons par exemple qu'on monte à Cz constant: on détermine $\operatorname{tg} \varphi$ pour chaque altitude et on aura ainsi $Cx + Cz \operatorname{tg} \varphi$. En traçant maintenant la courbe (10) $Cz/\cos \varphi$ par rapport à $\frac{1}{V^2}$, on remplace les valeurs constantes de Cz et Cx du deuxième membre par les mêmes valeurs multipliées par le facteur de correction dans lequel φ aura la valeur qui correspond à l'abscisse $\frac{1}{V^2}$ respective.

Partiquement, il est inutile de faire cette correction, les résultats, avec ou sans correction, étant généralement très rapprochés.

Détermination des temps de montée. Après avoir déterminé les vitesses à chaque altitude, une intégration généralement graphique nous donne les temps de montée:

$$t_1^2 = \int_1^2 \frac{dz}{v_z}.$$

On pourrait donner une expression simple du temps de montée en remarquant que les vitesses ascendantes suivent approximativement une loi linéaire:

$$v_z = v_0 \left(1 - \frac{z}{z_p} \right),$$

où v_0 est la vitesse ascendante au sol et z_p le plafond théorique de l'avion. On en déduit immédiatement le temps de montée à l'altitude z :

$$(11) \quad t_0^z = \frac{z_p}{v_0} \operatorname{Ln} \frac{z_p}{z_p - z}.$$

Ainsi par conséquent, il suffit de déterminer le plafond et la vitesse ascendante au sol pour pouvoir après calculer les temps de montée à différentes altitudes.

La formule (11) s'applique également dans le cas où l'altitude maxima atteinte n'est pas celle du plafond, mais une autre imposée par des conditions différentes, une montée par exemple à un autre angle d'incidence que celui optimum. A la place de z_p on mettra dans ce cas la nouvelle altitude de plafond et on déterminera v_0 suivant les conditions de montée que nous nous sommes proposées.

Vol plané

Si pour une cause quelconque le moteur ne fonctionne pas, l'avion est alors en *vol plané*. L'angle φ de la trajectoire avec l'horizontale est négatif (l'avion descend), de même que la traction de l'hélice *qui freine la chute de l'avion*. La première des équations (4) devient, en prenant la valeur absolue de φ :

$$(12) \quad G \sin \varphi = \rho/2 S V_z^2 C_x + F$$

où $F = \rho \pi R^2 \pi^2 \frac{R^2}{30^2} n_z^2 \psi$ représente le *freinage* de l'hélice et dépend de ses caractéristiques (fig 1). De (12) et de la deuxième équation (4) on tire

$$tg \varphi = \frac{C'_x}{C_x} \quad \left(C'_x = C_x + 2 \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^2 \frac{\pi R^2}{S} \psi \right).$$

Il s'agit maintenant de déterminer le coefficient ψ qui entre dans l'expression de C'_x . Pour cela il faut remarquer que sous l'action de la vitesse de déplacement l'hélice tourne et fournit une puissance qui est dépensée en frottement par le moteur. De l'égalité des expressions de la puissance fournie par l'hélice et celle absorbée par le moteur, on tire le nombre de tours qui est inversement proportionnel à μ . On aura ainsi en fonction de γ les valeurs de μ , ψ , η , n et V et par une méthode analogue au cas du vol avec moteur, on pourrait déterminer les conditions du *vol plané*.

Cependant, étant donné que la puissance absorbée par le moteur est très petite par rapport à sa puissance nominale, on pourrait négliger le frottement du moteur et dans ce cas l'hélice fonctionne à une valeur γ pour la quelle $\mu = 0$ ou négatif, mais très petit en valeur absolue. On détermine ainsi le coefficient ψ et par suite C'_x . Tout se passe alors comme pour le *vol à voile* (sans groupe moto propulseur) à condition de remplacer les C_x de la polaire par C'_x .

À partir de ce moment la discussion est très simple: il est facile de voir par exemple que si on vole à un angle constant, on a à la fois φ et $\frac{1}{2}\rho V_z^2$ également constants.

Une question qui est particulièrement intéressante est la vitesse d'atterrissage. Celle-ci est donnée par l'expression

$$V_z = \frac{G}{\rho/2 S \sqrt{C_x^2 + C_z^2}}$$

et on voit qu'elle est minimum au sol et pour un angle d'incidence pour le quel $(C_x^2 + C_z^2)$ est maximum.

Manuscrit reçu le 29 novembre 1929.
